非衝突拡散粒子系とランダム行列理論(基研研究会 確率モデルの統計力学,研究会報告)

香取, 眞理

非衝突拡散粒子系とランダム行列理論[1]

中央大学 理工学部　　香取眞理 [2]

本研究会で報告された確率過程・確率モデルのうち，1 次元非対称単純排他過程 (笹本氏), 多核成長模型 (今村氏), 弱磁場量子グラフ (齊藤氏), Randomly Triangulated Surface (守氏) などは，いずれもランダム行列理論と関係が深い．本講演では，Dyson によるブラウン運動模型の考え方に従ってランダム行列の理論を紹介し，エルミート行列値過程の固有値の成す確率過程が非衝突拡散粒子系として実現されることを説明した．講演では，時間的に非斉次な場合の非衝突拡散粒子系も，ブラウニアン・ブリッジを用いることによって構成できること，またそれらが Pandey-Mehta の 2 層行列模型と関係することなどにも言及した．

1　エルミート行列値過程と Bru の定理

1 次元ブラウン運動を考える．時刻 t でのブラウン粒子の位置を $B(t) \in \mathbf{R}$ と表すことにする．ただし $B(0)=0$ と仮定する．ブラウン運動の変動はつぎのルールによって規定されている;

$$dB(t)=0, \qquad \Big(dB(t)\Big)^2 = dt, \qquad 0 \le t \le \infty.$$

この変動のルールに従って計算すると (確率解析), ブラウン粒子の確率密度関数は

$$p(0,0;t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}x^2\right\}, \quad p(s,x;t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}(x-y)^2\right\},$$

$0 < s < t < \infty, x, y \in \mathbf{R}$ と定まる．

次に，2 つの独立なブラウン運動 $B(t)$ と $\widetilde{B}(t)$ を持ってくることにする．独立なので $dB(t)d\widetilde{B}(t) = 0$ である．互いに複素共役な複素数値の確率過程の対

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(B(t) + \sqrt{-1}\widetilde{B}(t)\Big) \in \mathbf{C}, \quad x(t)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(B(t) - \sqrt{-1}\widetilde{B}(t)\Big) \in \mathbf{C}.$$

を考える．この定義と上述のブラウン運動の変動のルールより

$$\begin{aligned}
(dx(t))^2 &= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(dB(t) + \sqrt{-1}d\widetilde{B}(t)\Big)\right\}^2 = \frac{1}{2}\Big\{(dB(t))^2 - (d\widetilde{B}(t))^2\Big\} = 0, \\
(dx(t)^*)^2 &= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{dB(t) - \sqrt{-1}d\widetilde{B}(t)\Big\}\right\}^2 = \frac{1}{2}\Big\{(dB(t))^2 - (d\widetilde{B}(t))^2\Big\} = 0,
\end{aligned}$$

[1] 共同研究者：種村秀紀氏 (千葉大理)

[2] E-mail: katori@phys.chuo-u.ac.jp

$$\begin{aligned} dx(t)dx(t)^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(dB(t)+\sqrt{-1}d\widetilde{B}(t)\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(dB(t)-\sqrt{-1}d\widetilde{B}(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((dB(t))^2+(d\widetilde{B}(t))^2\right)=dt \end{aligned}$$

となる．つまり，複素共役な対の変動は互いに相関を持つことが分かる．

さて，以上の簡単な考察を発展させて，本講演の主題である行列値の確率過程を導入することにする．$B_{ij}(t)$, $\widetilde{B}_{ij}(t)$, $1\le i\le j\le N$ をそれぞれお互いに独立な，原点からスタートするブラウン運動とする．そして次を定義しておく．

$$s_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}B_{ij}(t), & \text{if } i<j,\\ B_{ii}(t), & \text{if } i=j,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}B_{ij}(t), & \text{if } i>j,\end{cases}\qquad a_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{B}_{ij}(t), & \text{if } i<j,\\ 0, & \text{if } i=j,\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{B}_{ij}(t), & \text{if } i>j.\end{cases}$$

$N\times N$ のエルミート行列全体の集合を $\mathcal{H}(N)$ と書くことにする．我々は，次のような $N\times N$ のエルミート行列値の確率過程 $\Xi(t)\in\mathcal{H}(N)$ を考える．

$$\Xi(t)=(\xi_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}\equiv\left(s_{ij}(t)+\sqrt{-1}a_{ij}(t)\right)_{1\le i,j\le N}.$$

つまり，

$$\Xi(t)=\begin{pmatrix} s_{11}(t) & s_{12}(t)+\sqrt{-1}a_{12}(t) & s_{13}(t)+\sqrt{-1}a_{13}(t) & \cdots & s_{1N}(t)+\sqrt{-1}a_{1N}(t)\\ s_{12}(t)-\sqrt{-1}a_{12}(t) & s_{22}(t) & s_{23}(t)+\sqrt{-1}a_{23}(t) & \cdots & s_{2N}(t)+\sqrt{-1}a_{2N}(t)\\ s_{13}(t)-\sqrt{-1}a_{13}(t) & s_{23}(t)-\sqrt{-1}a_{23}(t) & s_{33}(t) & \cdots & s_{3N}(t)+\sqrt{-1}a_{3N}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ s_{1N}(t)-\sqrt{-1}a_{1N}(t) & s_{2N}(t)-\sqrt{-1}a_{2N}(t) & s_{3N}(t)-\sqrt{-1}a_{3N}(t) & \cdots & s_{NN}(t)\end{pmatrix}$$

である．各成分はブラウン運動から定義されるので，変動 $d\Xi(t)=(d\xi_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}$ は簡単に計算できる．まず $d\xi_{ij}(t)=0$, $1\le i,j\le N$ は明らかである．また

$$\left(d\xi_{ij}(t)\right)^2=0,\qquad d\xi_{ij}(t)d\xi_{ji}(t)=d\xi_{ij}(t)d\xi_{ij}(t)^*=dt,\quad 1\le i\ne j\le N,$$
$$\left(d\xi_{ii}(t)\right)^2=dt,\quad 1\le i\le N$$

である．これ以外は零なので，まとめると次のように表せる．

$$d\xi_{ij}(t)d\xi_{k\ell}(t)=\delta_{i\ell}\delta_{jk}dt,\quad 1\le i,j,k,\ell\le N.$$

$\Xi(t), t\in[0,\infty)$ はエルミート行列値過程なので，各時刻 $t\in[0,\infty)$ で，適当なユニタリー行列 $U(t)=(u_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}\in\mathcal{U}(N)$ によって対角化できる．固有値は実数である．ここでは，常に固有値が小さい順に並ぶように $U(t)$ を選ぶことにする；

$$U(t)^\dagger\Xi(t)U(t)=\Lambda(t)=\mathrm{diag}\{\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_N(t)\},$$

ただし

$$\lambda_1(t) \le \lambda_2(t) \le \cdots \le \lambda_N(t), \quad \forall t \in [0,\infty).$$

$U(t)$ はユニタリー行列に値をとる確率過程であり，固有値 $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_N(t))$ は N 次元実空間 $\mathbf{R}^N$ に値をとる確率過程である．次の問題を考えてみよう．

<u>問題</u>　$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_N(t))$ を，1 次元 $\mathbf{R}$ 上の N 粒子からなる確率過程と見なすことができるか．もしできるとすると，それはどのような N 粒子系であるか．

以後，$t=0$ で

$$\lambda_1(0) < \lambda_2(0) < \cdots < \lambda_N(0)$$

であるとする．また，このような**非衝突条件**を満たす配置全体の集合を

$$\mathbf{W}_N^{\mathrm{A}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : x_1 < x_2 < \cdots < x_N\}$$

と書くことにする．後で述べる Bru の定理を適用することによって，次の答が得られる．

<u>**答 1**</u>　この固有値の確率過程は，確率 1 で $\lambda(t) \in \mathbf{W}_N^{\mathrm{A}}$ であり，次の確率微分方程式の解として与えられる．

$$d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \sum_{j:1\le j\le N, j\ne i} \frac{1}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t)} dt, \quad 1 \le i \le N, t \in [0,\infty).$$

ただし，$B_i(t), 1 \le i \le N$ は N 個の独立なブラウン運動である．
この確率過程は，**Dyson のブラウン運動模型** とよばれる (Dyson 1962).

別の形の解答を以下に記そう．この N 粒子系では，粒子間距離に反比例する反発力がすべての 2 粒子間に働く．

$$h_N^{\mathrm{A}}(\mathbf{x}) = \prod_{1\le i<j\le N} (\lambda_j - \lambda_i),$$

$$b_i(\lambda) = \sum_{j:1\le j\le N, j\ne i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \ln h_N^{\mathrm{A}}(\lambda), \quad 1 \le i \le N$$

とする．すると，この固有値の確率過程の遷移確率密度は次の微分方程式の解である;

$$\frac{\partial}{\partial t} p_N(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{x}} p_N(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} p_N(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}).$$

ただし，$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (b_1(\mathbf{x}), \cdots, b_N(\mathbf{x}))$ である．これを解くと次が得られる．

<u>**答 2**</u>

$$p_N^{\mathrm{A}}(0,\mathbf{0};t,\mathbf{y}) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_N^{\mathrm{A}}} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N^{\mathrm{A}}(\mathbf{y})^2, \quad p_N^{\mathrm{A}}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) = \frac{1}{h_N^{\mathrm{A}}(\mathbf{x})} f_N^{\mathrm{A}}(t-s,\mathbf{y}|\mathbf{x}) h_N^{\mathrm{A}}(\mathbf{y}),$$

$0 < s < t < \infty, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^{\mathrm{A}}$. ここで $C_N^{\mathrm{A}} = (2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)$ である．また

$$G^{\mathrm{A}}(t,y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t}, \quad f_N^{\mathrm{A}}(t,\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \det_{1\le i,j\le N}\left[G^{\mathrm{A}}(t,y_j|x_i)\right].$$

この解は，Karlin and McGregor (1959) の形の行列式を Doob の意味で h 変換したものになっている．このことからこの系は，$t \in (0,\infty)$ で非衝突であるという条件を満たす，原点 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$ をスタートした N 個のブラウン粒子系 (**非衝突ブラウン運動**) であることが分かる．

もう一つ，別の行列値過程の例を見てみよう；

$$\Xi'(t)=(\xi'_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}\equiv(s_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}.$$

今度は，$N\times N$ の実対称行列の確率過程である．これは，各時刻 $t\in[0,\infty)$ で $N\times N$ の実直交行列 $V(t)\in\mathcal{O}(N)$ によって対角化される．成分間の相関は“分散”され,,

$$d\xi'_{ij}(t)d\xi'_{k\ell}(t)=\frac{1}{2}(\delta_{i\ell}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{j\ell})dt,\quad 1\le i,j,k,\ell\le N$$

となる．この固有値の確率過程に対しては，下記の Bru の定理より次のように求められる．

$$d\lambda_i(t)=dB_i(t)+\frac{1}{2}\sum_{j:1\le j\le N,j\neq i}\frac{1}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t)}dt,\quad 1\le i\le N.$$

$$p_N^{\mathrm{A}'}(0,\mathbf{0};t,\mathbf{y})=\frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_N^{\mathrm{A}'}}\exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\}h_N^{\mathrm{A}}(\mathbf{y}),$$

$0<t<\infty,\mathbf{y}\in\mathbf{W}_N^{\mathrm{A}}$. ただし $C_N^{\mathrm{A}'}=2^{N/2}\prod_{i=1}^N\Gamma(i/2)$.

固有値間の斥力が，$\Xi(t)$ よりも弱くなっていることに注意せよ．

以上の 2 つの行列値過程を一般化して，条件 $\xi_{ji}(t)^*=\xi_{ij}(t)$ を満たす複素数値過程 $\xi_{ij}(t),1\le i,j\le N,t\in[0,\infty)$ を成分に持つ，$N\times N$ のエルミート行列値過程 $\Xi(t)=(\xi_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}$ を考えることにしよう．$\Xi(t)$ を対角化するユニタリー行列を $U(t)=(u_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}$ と書く；

$$U(t)^\dagger\Xi(t)U(t)=\Lambda(t)=\mathrm{diag}\{\lambda_i(t)\}.$$

ただし $\lambda_1(t)\le\lambda_2(t)\le\cdots\le\lambda_N(t)$ とする．このとき，

$$\Gamma_{ij}(t)dt=(U(t)^\dagger d\,\Xi(t)U(t))_{ij}(U(t)^\dagger d\,\Xi(t)U(t))_{ji},\quad 1\le i,j\le N$$

と定義する．次の定理が証明できる．

__定理__ [Bru (1989), Bru (1991), Katori and Tanemura (2003)] $\xi_{ij}(t),1\le i<j\le N$ を連続半マルチンゲールとする．このとき $\Xi(t)$ の固有値 $\lambda(t)=(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_N(t))$ は次の確率微分方程式を満たす；

$$d\lambda_i(t)=dM_i(t)+dJ_i(t),\quad 1\le i\le N.$$

ここで $M_i(t)$ は分散が $\langle M_i\rangle_t=\int_0^t\Gamma_{ii}(s)ds$ で与えられるマルチンゲール部分であり，$J_i(t)$ は

$$dJ_i(t)=\sum_{j=1}^N\frac{1}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t)}\mathbf{1}(\lambda_i(t)\neq\lambda_j(t))\Gamma_{ij}(t)dt+(U(t)^\dagger d\,\Xi(t)U(t))_{ii}\text{の有界変動部分}$$

で与えられる有界変動部分である．

<u>Remark 1：ランダム行列理論での分類.</u>

エルミート行列値過程 $\Xi(t)$ の確率密度関数は，$\Xi \in \mathcal{H}(N)$ の体積要素 $\mathcal{V}(d\Xi)$ に対して

$$\mu(\Xi, t) = \frac{t^{-N^2/2}}{c_N^{\mathrm{A}}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}\mathrm{Tr}\,\Xi^2\right\}, \quad \Xi \in \mathcal{H}(N),$$

(ただし $c_N^{\mathrm{A}} = 2^{N/2}\pi^{N^2/2}$) で与えられる．確率 $\mu(\Xi, t)\mathcal{V}(d\Xi)$ がユニタリー変換 $\Xi \to U^\dagger \Xi U$ に対して不変であることから，この確率密度で分布するエルミート行列の集合は**ガウス型ユニタリー集団 (Gaussian Unitary Ensemble, GUE)** とよばれる (分散 $\sigma^2 = t$ の場合)．また，

$$p_N^{\mathrm{A}}(0, 0; t, \mathbf{y}) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_N^{\mathrm{A}}} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N^{\mathrm{A}}(\mathbf{y})^2$$

は，GUE ランダム行列の固有値分布の確率密度関数である (分散 $\sigma^2 = t$).

実対称行列値過程 $\Xi'(t)$ の確率密度関数は，$\Xi' \in \mathcal{S}(N)$ の体積要素 $\mathcal{V}'(d\Xi')$ に対して

$$\mu'(\Xi', t) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{c_N^{\mathrm{A}'}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}\mathrm{Tr}(\Xi')^2\right\}, \quad \Xi' \in \mathcal{S}(N),$$

(ただし $c_N^{\mathrm{A}'} = 2^{N/2}\pi^{N(N+1)/4}$) で与えられる．確率 $\mu'(\Xi', t)\mathcal{V}'(d\Xi')$ が，実直交変換 $\Xi \to V^\dagger \Xi V$, $V \in \mathcal{O}(N)$ に対して不変であることから，この確率密度で分布するエルミート行列の集合は**ガウス型直交集団 (Gaussian Orthogonal Ensemble, GOE)** とよばれる (分散 $\sigma^2 = t$ の場合)．また，

$$p_N^{\mathrm{A}'}(0, 0; t, \mathbf{y}) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_N^{\mathrm{A}'}} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N^{\mathrm{A}}(\mathbf{y})$$

は，GOE ランダム行列の固有値分布の確率密度関数である (分散 $\sigma^2 = t$).

2　より高い対称性を持つエルミート行列過程と固有値過程

パウリ行列と σ_0 を次式で定義する；

$$\sigma_0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

以下 $N \geq 2$ として，$2N \times 2N$ の行列

$$\Sigma_\mu = I_N \otimes \sigma_\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

を定義しておく．当然，$\Sigma_0 = I_{2N}$ である．

$B_{ij}^\nu(t)$, $\widetilde{B}_{ij}^\nu(t)$, $0 \leq \nu \leq 3$, $1 \leq i \leq j \leq N$ を，それぞれ互いに独立な，原点からスタートする 1 次元ブラウン運動とする．そして

$$s_{ij}^\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} B_{ij}^\nu(t), & \text{if } i < j, \\ B_{ii}^\nu(t), & \text{if } i = j, \end{cases} \qquad a_{ij}^\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \widetilde{B}_{ij}^\nu(t), & \text{if } i < j, \\ 0, & \text{if } i = j. \end{cases}$$

と定義する．ただし $i>j$ に対しては，$s^{\nu}_{ij}(t)=s^{\nu}_{ji}(t)$, $a^{\nu}_{ij}(t)=-a^{\nu}_{ji}(t)$ とする．

先のエルミート行列 $\Xi(t)$ を $2N\times 2N$ の場合に考えると(「粒子数」を 2 倍にして偶数個 $2N$ とした)，次のように，$2\times 4=8$ 個の項に分解できる;

$$\Xi(t)=\sum_{\nu=0}^{3}\left\{(s^{\nu}(t)\otimes\sigma_\nu)+(\sqrt{-1}a^{\nu}(t)\otimes\sigma_\nu)\right\}.$$

ここで $s^{\nu}(t)=(s^{\nu}_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}$, $a^{\nu}(t)=(a^{\nu}_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}$ である．そこで，このうちの 4 項のみを用いて表される $2N\times 2N$ のエルミート行列を考えることにする．具体的には，$1\le i,j\le N$ に対して，

$$(h^{\nu}_{\mu+}(t))_{ij}=\begin{cases} s^{\nu}_{ij}(t) & \text{if } \mu=0,1,3,\nu\neq\mu-2 \bmod 4\\ & \text{or } \mu=2,\nu=0,\\ \sqrt{-1}a^{\nu}_{ij}(t) & \text{if } \mu=0,1,3,\nu=\mu-2 \bmod 4\\ & \text{or } \mu=2,\nu\neq 0,\end{cases}$$

$$(h^{\nu}_{\mu-}(t))_{ij}=\begin{cases} \sqrt{-1}a^{\nu}_{ij}(t) & \text{if } \mu=0,1,3,\nu\neq\mu-2 \bmod 4\\ & \text{or } \mu=2,\nu=0,\\ s^{\nu}_{ij}(t) & \text{if } \mu=0,1,3,\nu=\mu-2 \bmod 4\\ & \text{or } \mu=2,\nu\neq 0,\end{cases}$$

として，

$$\Xi_{\mu\pm}(t)=\sum_{\nu=0}^{3}(h^{\nu}_{\mu\pm}(t)\otimes\sigma_\nu),\qquad \mu=0,1,2,3$$

とすればよい．$\Xi_{\mu\sigma}(t)$ は $\mu=0,1,2,3,\sigma=\pm$ なので，$\mathcal{H}(2N)$ の部分集合である $4\times 2=8$ 種類の集合 $\mathcal{H}_{\mu\sigma}(2N)$ が得られることになる．対称性から次のことが示せる;

(i) $\sigma=+$ のときは，固有値はすべて 2 重に縮退している; $\lambda=(\omega_1,\omega_1,\omega_2,\omega_2,\cdots,\omega_N,\omega_N)$.

(ii) $\sigma=-$ のときは，固有値は $\pm$ の対で現れる; $\lambda=(\omega_1,-\omega_1,\omega_2,-\omega_2,\cdots,\omega_N,-\omega_N)$.

Bru の定理を応用した結果，次が分かった．

GUE と GOE とは異なる確率微分方程式は，(時間単位を変換すると) 次の 3 つのいずれかに帰着される．

<u>Case 1</u>　$(\mu,\sigma)=(1,+),(2,+)$ の場合．　固有値は $\lambda=(\omega_1,\omega_1,\omega_2,\omega_2,\cdots,\omega_N,\omega_N)$ であり，次の確率微分方程式に従う;

$$d\omega_i(t)=dB_i(t)+2\sum_{j:1\le j\le N,j\neq i}\frac{1}{\omega_i(t)-\omega_j(t)}dt,\quad 1\le i\le N.$$

異なる固有値の間の斥力は，GUE よりも強いことに注意せよ．

$(\mu,\sigma)=(2,+)$ の場合の $\Xi(t)\in\mathcal{H}_{2+}(2N)$ は self-dual エルミート行列とよばれ，エルミート性 $\Xi(t)^\dagger=\Xi(t)$ に加えて，対称性 $\Xi(t)^T\Sigma_2=\Sigma_2\Xi(t)$ を持つ．また，対角化する行列はユニタリーかつシンプレクティックである; $\mathcal{U}(2N)\simeq \mathrm{Sp}(N,\mathbf{C})\cap U(2N,\mathbf{C})$.

<u>Remark 2.</u> 確率密度関数は

$$p_N^{\mathrm{A}''}(0,\mathbf{0};t,\mathbf{y}) = \frac{t^{-N(N-1)/2}}{C_N^{\mathrm{A}''}} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N^{\mathrm{A}}(\mathbf{y})^4, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A$$

で与えられる．これは，ランダム行列理論で知られている**ガウス型シンプレクティック集団** (**Gaussian Symplectic Ensemble, GSE**) の (分散 $\sigma^2 = t$ の場合の) 固有値分布に等しい．

<u>Case 2</u> $(\mu,\sigma) = (2-)$ の場合． 固有値は $\lambda = (\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2, \cdots, \omega_N, -\omega_N)$ であり，次の確率微分方程式に従う；

$$d\omega_i(t) = dB_i(t) + \left[\frac{1}{\omega_i(t)} + \sum_{j:1\le j\le N, j\ne i}\left\{\frac{1}{\omega_i(t)-\omega_j(t)} + \frac{1}{\omega_i(t)+\omega_j(t)}\right\}\right] dt, \qquad 1 \le i \le N.$$

$\mathbf{W}_N^{\mathrm{A}}$ の代わりに $\mathbf{W}_N^{\mathrm{C}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N\}$ として，$\omega(0) \in \mathbf{W}_N^{\mathrm{C}}$ とすると，確率 1 で $\omega(t) \in \mathbf{W}_N^{\mathrm{C}}, {}^\forall t \in (0,\infty)$ である．また，

$$h_N^{\mathrm{C}}(\mathbf{x}) = \prod_{1\le i<j\le N}(x_j^2 - x_i^2)\prod_{\ell=1}^N x_\ell, \qquad G^{\mathrm{C}}(t,y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-(y-x)^2/2t} - e^{-(y+x)^2/2t}\right),$$

$$f_N^{\mathrm{C}}(t,\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \det_{1\le i,j\le N}\left[G^{\mathrm{C}}(t,y_j|x_i)\right], \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^{\mathrm{C}}$$

とすると，この $\omega(t)$ の遷移確率密度関数は

$$p_N^{\mathrm{C}}(0,\mathbf{0};t,\mathbf{y}) = \frac{t^{-N(2N+1)/2}}{C_N^{\mathrm{C}}} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N^{\mathrm{C}}(\mathbf{y})^2,$$

$$p_N^{\mathrm{C}}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) = \frac{1}{h_N^{\mathrm{C}}(\mathbf{x})} f_N^{\mathrm{C}}(t-s,\mathbf{y}|\mathbf{x}) h_N^{\mathrm{C}}(\mathbf{y}),$$

$0 < s < t < \infty$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^{\mathrm{C}}$ (ただし $C_N^{\mathrm{C}} = (\pi/2)^{N/2}\prod_{i=1}^N \Gamma(2i)$) で与えられることが分かる．

> 上の表式から，$\omega(t)$ は原点に**吸収壁**がある場合の，以下の条件を満たす，正の領域の N 個のブラウン粒子の運動を記述することが分かる．
>
> (i) $t = 0$ にすべて原点からスタートする．
>
> (ii) $t \in (0,\infty)$ で互いに非衝突．
>
> (iii) $t \in (0,\infty)$ で原点にある**吸収壁と衝突しない**．

<u>Case 3</u> $(\mu,\sigma) = (0-), (1-), (3-)$ の場合． 固有値は $\lambda = (\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2, \cdots, \omega_N, -\omega_N)$ であり，次の確率微分方程式に従う；

$$d\omega_i(t) = dB_i(t) + \sum_{j:1\le j\le N, j\ne i}\left\{\frac{1}{\omega_i(t)-\omega_j(t)} + \frac{1}{\omega_i(t)+\omega_j(t)}\right\} dt, \quad 1 \le i \le N.$$

$\mathbf{W}_N^{\mathrm{D}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : |x_1| < x_2 < \cdots < x_N\}$ として $\omega(0) \in \mathbf{W}_N^{\mathrm{D}}$ とすると，確率 1 で $\omega(t) \in \mathbf{W}_N^{\mathrm{D}}, {}^\forall t \in (0,\infty)$ である．また，

$$h_N^{\mathrm{D}}(\mathbf{x}) = \prod_{1\le i<j\le N}(x_j^2 - x_i^2), \qquad G^{\mathrm{D}}(t,y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-(y-x)^2/2t} + e^{-(y+x)^2/2t}\right),$$

$$f_N^{\mathrm{D}}(t,\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \det_{1\le i,j\le N}\left[G^{\mathrm{D}}(t,y_j|x_i)\right], \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^{\mathrm{D}}$$

とすると，この $\omega(t)$ の遷移確率密度関数は

$$p_N^{\mathrm{D}}(0,\mathbf{0};t,\mathbf{y}) = \frac{t^{-N(2N-1)/2}}{C_N^{\mathrm{D}}}\exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\}h_N^{\mathrm{D}}(\mathbf{y})^2,$$

$$p_N^{\mathrm{D}}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) = \frac{1}{h_N^{\mathrm{D}}(\mathbf{x})}f_N^{\mathrm{D}}(t-s,\mathbf{y}|\mathbf{x})h_N^{\mathrm{D}}(\mathbf{y}),$$

$0 < s < t < \infty$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^{\mathrm{D}}$ (ただし $C_N^{\mathrm{D}} = (\pi/2)^{N/2}\prod_{i=1}^N \Gamma(2i-1)$) で与えられることが分かる．

上の表式から，$\omega(t)$ は原点に**反射壁**がある場合の，以下の条件を満たす，正の領域の N 個のブラウン粒子の運動を記述することが分かる．

(i) $t=0$ にすべて原点からスタートする．

(ii) $t \in (0,\infty)$ で互いに非衝突．

(iii) 粒子は原点にある**反射壁と完全反射する**．

Remark 3. Case 2 と Case 3 はそれぞれ，Altland と Zirnbauer (1996, 1997) によって導入された **class C, class D** とよばれるランダム行列集団の固有値分布関数と一致する．$\mathbf{W}_N^\sharp, \sharp = \mathrm{A, C, D}$ はそれぞれ，A_{N-1} 型，C_N 型，D_N 型の Weyl 領域 (Weyl chamber) とよばれる．これらは，古典群に対する Weyl の表現論と関係する．class C と class D のクラスに属する行列は，エルミート性 $\Xi(t)^\dagger = \Xi(t)$ に加えて次の対称性をもつ; $\Xi(t)^T\Sigma_2 = -\Sigma_2\Xi(t)$ (class C), $\Xi(t)^T\Sigma_1 = -\Sigma_1\Xi(t)$ (class D). 別の言い方をすると，$\mathcal{H}_{2-}(2N) \simeq \mathrm{sp}(N,\mathbf{C}) \cap \mathcal{H}(2N)$, $\mathcal{H}_{1-}(2N) \simeq \mathrm{so}(2N,\mathbf{C}) \cap \mathcal{H}(2N)$ である．

3 おわりに

本報告書では，時間的に斉次な非衝突拡散過程についてだけ記述した．時間的に非斉次な非衝突拡散過程と多層ランダム行列模型に関しては，参考文献に示した論文を参照していただきたい．

謝辞

本研究に関係して有益な議論をして下さった永尾太郎氏 (大阪大理学部) と福井隆裕氏 (茨城大理学部) に感謝いたします．

参考文献

[1] M. Katori and H. Tanemura, Scaling limit of vicious walkers and two-matrix model, *Phys. Rev. E* **66** (2002), 011105.

[2] M. Katori and H. Tanemura, Functional central limit theorem for vicious walkers, *Stoch. Stoch. Rep.* **75** (2003), 369-390; arXiv.math.PR/0204386.

[3] T. Nagao, M. Katori, and H. Tanemura, Dynamical correlations among vicious random walkers, *Phys. Lett.* **A307** (2003), 29-35.

[4] J. Cardy and M. Katori, Families of vicious walkers, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 609-629.

[5] M. Katori, T. Nagao, and H. Tanemura, Infinite systems of non-colliding Brownian particles, to be published in *Adv. Stud. in Pure Math.* "*Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*", Mathematical Society of Japan, 2003; arXiv.math.PR/0301143.

[6] M. Katori and N. Komatsuda, Moments of vicious walkers and Möbius graph expansion, *Phys. Rev. E* **67** (2003), 051110.

[7] M. Katori and H. Tanemura, Noncolliding Brownian motions and Harish-Chandra formula, *Elect. Comm. in Probab.* **8** (2003), 112-121; arXiv.math.PR/0306386.

[8] M. Katori, H. Tanemura, T. Nagao, and N. Komatsuda, Vicious walk with a wall, noncolliding meanders, and chiral and Bogoliubov-de Gennes random matrices, *Phys. Rev. E* **68**, (2003), 021112.